Kapitola 8

URČITÝ INTEGRÁL

Jedním z nejstarších problémů matematiky je určování obsahů rovinných obrazců a objemů těles. Už v antickém Řecku se pokoušeli vyjádřit obsahy obrazců pomocí opsaných a vepsaných útvarů. Teprve po vybudování infinitesimálního počtu se však ukázalo, že určování ploch, objemů a řadu dalších geometrických, fyzikálních i jiných aplikací je možné řešit technikou součtu nekonečného počtu nekonečně malých veličin. To je hlavní myšlenka, na jejímž základě budeme v této kapitole definovat pojem Riemannova určitého integrálu.

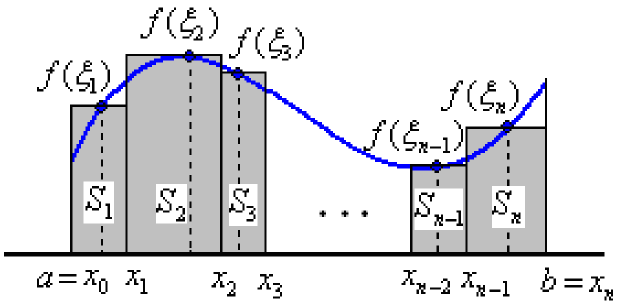
8.1 Pojem Riemannova určitého integrálu

Motivační úloha k zavedení určitého integrálu

Budeme se snažit co nejpřesněji vyjádřit obsah obrazce omezeného křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Interval $\langle a,b\rangle$ rozdělíme na n dílků pomocí dělících bodů x_i tak, že: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Velikost každého takového dílku pro $i = 1,2,\ldots,n$ označme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

V každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ zvolme bod ξ_i a určeme hodnotu $f(\xi_i)$.

Obsah obrazce omezeného křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ je pak přibližně roven obsahu obdélníka $S_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$.



Součet obsahů všech takovýchto obdélníků $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ je přibližně roven obsahu uvažované plochy. Zdá se, že vyjádření uvažované plochy bude tím přesnější, čím větší bude počet dělících bodů.

Dělení intervalu

Definice 8.1.: Nechť $\langle a,b\rangle$ je libovolný uzavřený interval. Dělením intervalu $\langle a,b\rangle$ nazýváme konečnou posloupnost bodů $D_n = \{x_0, x_1,\ldots,x_{n-1}, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Poznámka: Čísla x_i budeme nazývat dělící body a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (pro $i = 1,2,...,n$) budeme nazývat dělící intervaly dělení D_n. Délku nejdelšího dělícího intervalu nazveme normou dělení D_n a budeme ji značit $\nu(D)_n$. Je tedy $\nu(D_n) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1,2,...,n\}$. Jestliže pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ platí $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$, říkáme, že jde o **normální posloupnost dělení** intervalu $\langle a,b \rangle$.

Integrální součet

Definice 8.2.: Nechť $\langle a,b \rangle$ je uzavřený interval a $f(x)$ funkce ohraničená na tomto intervalu. Buď D_n dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ a $V_n = \{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}, \xi_n\}$ posloupnost bodů, pro které platí $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, kde $i = 1,2,...,n$. Potom číslo $s(f, D_n, V_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ nazýváme integrálním součtem, příslušným k dělení D_n a výběru reprezentantů V_n.

Z geometrického hlediska představuje integrální součet $s(f, D_n, V_n)$ součet obsahů obdélníků se základnami $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a výškami $f(\xi_i)$ pro $i = 1,2,...,n$.

Riemannův určitý integrál

Definice 8.3.: Nechť $\langle a,b \rangle$ je uzavřený interval a $f(x)$ funkce ohraničená na intervalu $\langle a,b \rangle$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} s(f, D_n, V_n) = \mathbf{I}$ pro libovolnou normální posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $\langle a,b \rangle$ a libovolný výběr reprezentantů V_n, nazveme číslo **I** Riemannovým určitým integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Značíme ho symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$, přičemž číslo *a* nazýváme dolní a číslo *b* horní mezí Riemannova určitého integrálu.

Poznámka: Existuje-li na daném intervalu Riemannův určitý integrál funkce $f(x)$, říkáme, že funkce je na tomto intervalu integrovatelná.
V matematice se definují i jiné typy integrálů (například obecnější Lebesgueův integrál). My se však budeme zabývat pouze Riemannovým, proto dále budeme místo „Riemannův určitý integrál“ uvádět pouze „určitý integrál“.

Z geometrického hlediska představuje číslo $\int_a^b f(x)\,dx$ obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou *x* a přímkami $x = a$, $x = b$.

Z definice 8.3. vyplývá, že nutnou podmínkou integrovatelnosti funkce je ohraničenost funkce. Uveďme další podmínky, zaručující integrovatelnost funkce.

Podmínky integrovatelnosti funkce

Věta 8.4.: a) Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná.

b) Funkce monotónní uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná.

c) Funkce ohraničená na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$, která má na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti, je na tomto intervalu integrovatelná.

Vlastnosti určitého integrálu

Věta 8.5.: Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou na intervalu $\langle a,b\rangle$ integrovatelné, *k* a *c* jsou reálná čísla, kde $c\in(a,b)$. Pak platí:

a) $\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx,$

b) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$

c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$

Poznámka: V definici Riemannova určitého integrálu jsme předpokládali interval $\langle a,b\rangle$, kde $a<b$. Uvedenou definici je možné rozšířit i na případy, kdy $a=b$ a $a>b$ tak, že definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ a $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

8.2 Výpočet určitého integrálu

Základní věta integrálního počtu

Věta 8.6. : (Leibniz-Newtonova**)** Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, funkce $F(x)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a na intervalu (a,b) je primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)\,.$$

Uvedená věta dává návod, jak počítat určitý integrál. Postupujeme tak, že k funkci $f(x)$ určíme primitivní funkci $F(x)$. Do primitivní funkce dosadíme nejprve horní mez *b* a od této funkční hodnoty odečteme hodnotu primitivní funkce v dolní mezi *a*.

Příklad 8.1.

Pomocí Leibniz-Newtonovy věty vypočítejte určitý integrál:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx$, b) $\int_1^2 (x^3-x+1)\,dx$, c) $\int_0^1 \ln x\,dx\,.$

Řešení: a) Integrovaná funkce $f(x)=\frac{1}{x+1}$ je na intervalu $\langle 0,3\rangle$ spojitá a tedy integrovatelná. Funkce $F(x)=\ln|x+1|$ je na intervalu $\langle 0,3\rangle$ spojitá a na intervalu $(0,3)$ je primitivní k funkci $f(x)=\frac{1}{x+1}$. Jsou tedy splněny předpoklady Leibniz-Newtonovy věty a platí:

$$\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = [\ln|x+1|]_0^3 = \ln|3+1| - \ln|0+1| = \ln|4| - \ln|1| = \ln 4 - 0 = \ln 4\,.$$

b) Integrovaná funkce $f(x)=x^3-x+1$ je na intervalu $\langle 1,2\rangle$ spojitá a tedy integrovatelná. Funkce $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x$ je na intervalu $\langle 1,2\rangle$ spojitá a na intervalu $(1,2)$ je primitivní k funkci $f(x)=x^3-x+1$. Jsou tedy splněny předpoklady Leibniz-Newtonovy věty a platí:

$$\int_1^2 (x^3 - x + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{4}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{13}{4}.$$

c) Funkce $f(x) = \ln x$ není na intervalu $\langle 0,1\rangle$ ohraničená (v bodě $x = 0$ není funkce definovaná), a není tedy na daném intervalu integrovatelná. Pro výpočet tohoto integrálu není možné Leibniz-Newtonovu větu použít. Tento integrál se nazývá nevlastní. Budeme se jím blíže zabývat v podkapitole 8.3.

Metody pro výpočet určitého integrálu

Při výpočtu určitých integrálů je možné používat všechny metody a postupy, které jsme používali při počítání neurčitých integrálů. Tedy i substituční metodu a metodu per partes. Obě nyní v souvislosti s výpočtem určitého integrálu připomeneme.

Substituční metoda pro výpočet určitého integrálu

Věta 8.7. : Nechť funkce $\varphi(x)$ má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(x)$. Nechť $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ a nechť funkce $t = \varphi(x)$ zobrazuje interval $\langle a,b\rangle$ na interval $\langle A,B\rangle$, obsahující body α,β. Nechť funkce $\varphi(x)$ je spojitá na intervalu $\langle A,B\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = [F(t)]_\alpha^\beta = F(\alpha) - F(\beta).$$

Jak je zřejmé z uvedené věty, použití substituční metody je obdobné jako u neurčitého integrálu. Navíc však musíme provést transformaci (přepočítání) mezí určitého integrálu. To provádíme pomocí substituční rovnice $t = \varphi(x)$, kdy za x dosadíme původní meze *a, b* a vypočítáme nové meze α,β.

Příklad 8.2.

Vypočítejte substituční metodou : a) $\int_0^1 4.e^{-2x}dx$, b) $\int_1^e \frac{2.\ln x}{3x}dx$.

Řešení: a) $$\int_0^1 4.e^{-2x}dx = \left|\begin{array}{c} \text{subst}: -2x = t \\ -2dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = -2 \end{array}\right| = \int_0^{-2} 4.e^t.\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -2\int_0^{-2} e^t\,dt = 2\int_{-2}^0 e^t\,dt =$$

$$= 2.[e^t]_{-2}^0 = 2.(e^0 - e^{-2}) = 2 - \frac{2}{e^2} \cong 1{,}729$$

b) $$\int_1^e \frac{2\ln x}{3x}dx = \left|\begin{array}{l} \text{subst}: \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 \frac{2}{3}\cdot t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t\,dt = \frac{2}{3}\frac{1}{2}[t^2]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot(1-0) = \frac{1}{3}$$

Druhou možností výpočtu určitého integrálu substituční metodou (bez nutnosti transformace mezí) je samostatné vyřešení neurčitého integrálu a následné užití Leibniz-Newtonovy věty.

Podobně jako v podkapitole 7.2. (viz příklad 7.4.) můžeme substituční metodu používat i v případě, že integrovaná funkce není součinem složené funkce a derivace její vnitřní složky.

V tomto případě bude mít integrační schéma tvar:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} \text{subst}: x=\varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta) \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = [F(t)]_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha)$$

Příklad 8.3.

Vypočítejte substituční metodou $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$.

Řešení:

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst}: x=t^2 \\ dx = 2tdt \\ x=4 \Rightarrow t=2 \\ x=9 \Rightarrow t=3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{1}{t(t^2+1)}2tdt = 2\int_2^3 \frac{1}{t^2+1}dt = 2[\operatorname{arctg} t]_2^3 = 2(\operatorname{arctg} 3 -$$
$$-\operatorname{arctg} 2) \cong 0{,}2838.$$

Metoda per partes pro výpočet určitého integrálu

Věta 8.8. : Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $\langle a,b \rangle$ a jejich derivace $u'(x)$ a $v'(x)$ jsou na intervalu $\langle a,b \rangle$ spojité. Pak platí

$$\int_a^b u.v'\,dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v\,dx.$$

Při výpočtu určitého integrálu metodou per partes postupujeme stejně jako u integrálu neurčitého. Na každou část primitivní funkce však aplikujeme Leibniz-Newtonovu větu.

Příklad 8.4.

Metodou per partes vypočítejte: a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$, b) $\int_1^2 x\ln^2 x\,dx$.

Řešení: Na základě pravidel, která byla uvedena v podkapitole 7.3., volíme $u = x$, $v' = \cos x$, tedy $u' = 1$, $v = \sin x$. Vzhledem k tomu, že derivace $u' = 1$ a $v' = \cos x$ jsou na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ spojité, jsou předpoklady věty 8.8. splněny.

Platí tedy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=x & v'=\cos x \\ u'=1 & v=\sin x \end{array} \right| = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 \right) + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

b) $\int_1^2 x.\ln^2 x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln^2 x & v'=x \\ u'=2.\ln x.\frac{1}{x} & v=\frac{1}{2}x^2 \end{array} \right| = \left[\frac{1}{2}x^2\ln^2 x \right]_1^2 - \int_1^2 x.\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & v'=x \\ u'=\frac{1}{x} & v=\frac{1}{2}x^2 \end{array} \right| =$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln^2 x \right]_1^2 - \left(\left[\frac{1}{2}x^2\ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}xdx \right) = \left[\frac{1}{2}x^2\ln^2 x \right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\ln x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(4\ln^2 2 - \ln^2 1) - \frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 1) + \frac{1}{4}(4-1) = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4} = \ln 4.(\ln 2 - 1) + \frac{3}{4}.$$

Úlohy 8.2.

1\. a) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$, b) $\int_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$, d) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, e) $\int_2^4 2^x dx$, f) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2\. a) $\int_0^1 x.(2x-1)^{10} dx$, b) $\int_0^{\sqrt{2}} x.\sqrt{2-x^2}\, dx$, c) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$, d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$, e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\cos x} dx$,

f) $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

3\. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x\, dx$, b) $\int_1^e \ln x\, dx$, c) $\int_0^1 x^3.e^{2x} dx$, d) $\int_1^2 x.\log_2 x\, dx$, e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos x\, dx$, f) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Výsledky úloh 8.2.

1\. a) $-\frac{3}{8}$, b) $\frac{7}{3}$, c) $2-\frac{\pi}{4}$, d) $\ln 2$, e) $\frac{12}{\ln 2}$, f) $\frac{\pi}{4}$.

2\. a) $\frac{1}{22}$, b) $\frac{2.\sqrt{2}}{3}$, c) $7+2\ln 2$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\ln 2$, f) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 2}$.

3\. a) 1, b) 1, c) $\frac{e^2+3}{8}$, d) $2-\frac{3}{4\ln 2}$, e) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$, f) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

8.3 !*!Nevlastní integrál

Doposud jsme při výpočtu určitého integrálu předpokládali, že

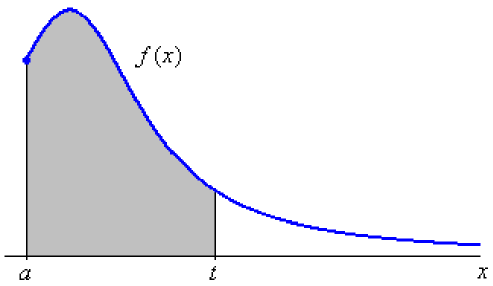
- integrační interval je ohraničený, neboť se jednalo o uzavřený interval $\langle a,b\rangle$, kde meze *a*, *b* byla konečná čísla,
- funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená.

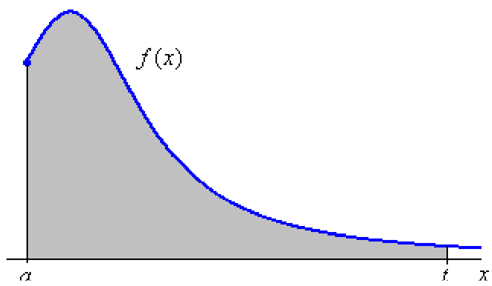
Pokud některá z uvedených podmínek nebude splněná, dostaneme integrál, který budeme nazývat nevlastním integrálem vzhledem k mezi intervalu nebo nevlastní integrál vzhledem k neohraničenosti funkce.

Integrál nevlastní vzhledem k mezi intervalu

Motivační úvaha k integrálu na neohraničeném intervalu

Uvažujme určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, kde např. $b=\infty$. V souladu s geometrickou interpretací určitého integrálu budeme požadovat, aby integrál $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ vyjadřoval obsah plochy, ohraničené grafem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\infty)$. Zvolíme-li číslo $t \in (a,\infty)$, vyjadřuje zřejmě hodnota integrálu $\int_a^t f(x)\,dx$ hodnotu $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ tím přesněji, čím větší bude číslo *t* (viz obrázek).





Nevlastní integrál vzhledem k mezím intervalu

Definice 8.9.: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,\infty)$.

Existuje-li limita $\mathrm{L}=\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$, nazýváme ji nevlastním integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\infty)$ a značíme ji $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Je-li limita konečná, říkáme, že uvažovaný nevlastní integrál konverguje.
Jestliže limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Poznámka: Analogicky by se definoval pro funkci $f(x)$ spojitou na intervalu $(-\infty,b\rangle$ nevlastní integrál $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ jako $\mathrm{L}=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$.

Příklad 8.5.

Vypočítejte nevlastní integrály: a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x.\ln^2 x}$.

Řešení: a) Funkce $f(x)=\frac{1}{x^2}$ je spojitá na intervalu $\langle 1,\infty)$. Nevlastní integrál vzhledem k mezi $b=\infty$ počítáme jako limitu $\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^2}=\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-2}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^t=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right)=0+1=1.$$

Limita je rovna 1, tedy zadaný nevlastní integrál konverguje.

b) Funkce $f(x)=\frac{1}{x.\ln^2 x}$ je spojitá na intervalu $\langle 2,\infty)$. Pokud není možné integrovat přímo pomocí základních vzorců, vypočítáme nejprve neurčitý integrál $\int\frac{dx}{x.\ln^2 x}$, abychom se vyhnuli složitým formálním zápisům, případně transformacím mezí (u substituční metody).

$$\int\frac{dx}{x.\ln^2 x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=u\\ \frac{1}{x}dx=du\end{array}\right|=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{\ln x}+\mathrm{c}$$

Je tedy $\int_2^\infty \frac{dx}{x.\ln^2 x}=\lim\limits_{t\to\infty}\int_2^t \frac{dx}{x.\ln^2 x}=\lim\limits_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^t=\lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln t}+\frac{1}{\ln 2}\right)=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$,

a zadaný nevlastní integrál konverguje.

Poznámka: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $(-\infty,\infty)$ a konvergují-li oba nevlastní integrály $\mathrm{L}_1 = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\mathrm{L}_2 = \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx$, kde c je libovolné číslo z intervalu $(-\infty,\infty)$, klademe $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$. Pokud alespoň jeden z nevlastních integrálů diverguje, říkáme, že nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverguje.

Příklad 8.6.

Vypočítejte nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ je spojitá na intervalu $(-\infty,\infty)$. Zvolme číslo, ležící uvnitř intervalu $(-\infty,\infty)$, například $c = 0$. Zadaný integrál pak počítáme jako součet nevlastních integrálů $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^t = \lim_{t\to\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

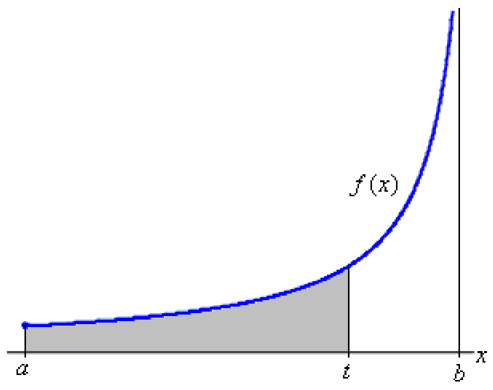
Vzhledem k tomu, že oba nevlastní integrály konvergují, konverguje i zadaný integrál a platí

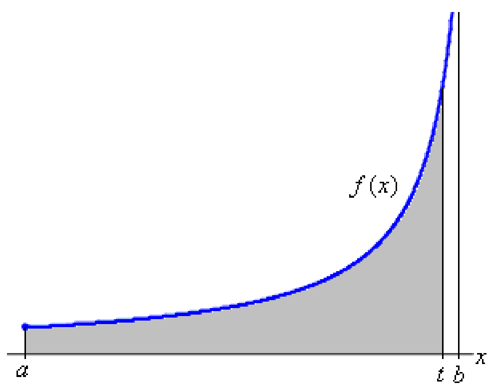
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Integrál nevlastní vzhledem k neohraničenosti funkce

Motivační úvaha k integrálu neohraničené funkce

Uvažujme nyní plochu ohraničenou grafem funkce $f(x)$ a osou x pro $x \in \langle a,b)$. Zvolíme-li číslo $t \in (a,b)$, vyjadřuje hodnota integrálu $\int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx$ hodnotu $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ tím přesněji, čím více se bude číslo t blížit číslu b zleva (viz obrázek).





Nevlastní integrál vzhledem k neohraničenosti funkce

Definice 8.10.: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b)$ a není ohraničená v levém okolí bodu b. Existuje-li limita $\mathrm{L} = \lim\limits_{t\to b^-}\int\limits_a^t f(x)\,dx$, nazýváme ji nevlastním integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b)$ a značíme ji $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.
Je-li limita konečná, říkáme, že uvažovaný nevlastní integrál konverguje.
Jestliže limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Poznámka: Analogicky by se definoval pro funkci $f(x)$ spojitou na intervalu $(a,b\rangle$ a neohraničenou v pravém okolí bodu a nevlastní integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jako $\mathrm{L} = \lim\limits_{t\to a^+}\int\limits_t^b f(x)\,dx$.

Příklad 8.7.

Vypočítejte integrál $\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Řešení: Funkce $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$ je spojitá na intervalu $(1,2\rangle$. V bodě $b=1$ je integrovaná funkce neohraničená, jde proto o nevlastní integrál. Budeme ho počítat jako limitu $\lim\limits_{t\to 1^+}\int\limits_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx.$ Nejprve však určíme primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{subst. } \sqrt{x-1}=u\\ x-1=u^2\\ x=u^2+1\\ dx=2u\,du\end{array}\right| = \int \frac{(u^2+1)-2}{u}\cdot 2u\,du = 2\int (u^2-1)\,du = 2.\left(\frac{1}{3}u^3-u\right)=$$

$$=2u.\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)=2\sqrt{x-1}\left(\frac{x-1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}\sqrt{x-1}.(x-4).$$

Tedy

$$\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t\to 1^+}\int\limits_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t\to 1^+}\left[\frac{2}{3}\sqrt{x-1}.(x-4)\right]_t^2 = \lim_{t\to 1^+}\left[\frac{2}{3}.1.(-2)-\frac{2}{3}\sqrt{t-1}(t-4)\right]=$$

$$=-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}.0.(-3)=-\frac{4}{3}\ .$$

Je-li integrál nevlastní současně vzhledem k mezím i neohraničenosti funkce, mluvíme o nevlastním integrálu smíšeného typu.

Nekonečné meze a body v jejichž libovolném okolí je integrovaná funkce $f(x)$ neohraničená, nazýváme singularitami příslušného nevlastního integrálu. Má-li nevlastní integrál v integračním intervalu více singularit, rozdělíme interval na více dílčích intervalů tak, aby daný nevlastní integrál měl v každém z nich jedinou singularitu, a to buď v dolní nebo v horní mezi. Konvergují-li nevlastní integrály ve všech těchto dílčích intervalech, hodnotu daného integrálu určíme jako součet hodnot nevlastních integrálů na všech dílčích intervalech. Je-li aspoň jeden z nevlastních integrálů na dílčích intervalech divergentní, je daný nevlastní integrál divergentní.

Příklad 8.8.

Vypočítejte integrály: a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x-2}\,dx$.

Řešení: a) Integrál $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ má singularitu v dolní (pro neohraničenost funkce) i horní (pro neohraničenost integračního intervalu) mezi. Zvolíme číslo $c \in (0, \infty)$. Nechť například $c = 1$. Zadaný integrál pak počítáme jako součet nevlastních integrálů $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{t}\right) = -1+\infty = \infty \quad \text{diverguje}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to +\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to +\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{konverguje}$$

Tedy $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ diverguje,neboť jeden z dílčích nevlastních integrálů diverguje.

b) Integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x-2}\,dx$ má singularitu v horní mezi (neohraničenost integračního intervalu), ale také uvnitř integračního intervalu v bodě $x = 2$ (neohraničenost funkce). Musíme tedy rozdělit integrační interval na tři podintervaly pomocí dělících bodů $x = 2$ a zvoleného bodu např. $c = 3$. Na každém ze tří intervalů $\langle 1,2),\ (2,3\rangle,\ \langle 3,\infty)$ bude mít integrál funkce $y = \frac{1}{x-2}$ už pouze jednu singularitu.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x-2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_3^{\infty} \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t_1\to 2^-} \int_1^{t_1} \frac{1}{x-2}\,dx + \lim_{t_2\to 2^+} \int_{t_2}^3 \frac{1}{x-2}\,dx +$$

$$+ \lim_{t_3\to\infty} \int_3^{t_3} \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t_1\to 2^-}\left[\ln|x-2|\right]_1^{t_1} + \lim_{t_2\to 2^+}\left[\ln|x-2|\right]_{t_2}^3 + \lim_{t_3\to\infty}\left[\ln|x-2|\right]_3^{t_3} = \lim_{t_1\to 2^-}\left(\ln|t_1-2| - \ln 1\right) +$$

$$+ \lim_{t_2\to 2^+}\left(\ln 1 - \ln|t_2-2|\right) + \lim_{t_3\to\infty}\left(\ln|t_3-2| - \ln 1\right) = (-\infty-0) + (0+\infty) + (\infty-0).$$

Vzhledem k tomu, že nevlastní integrály na dílčích intervalech divergují, diverguje i zadaný integrál.

Úlohy 8.3.

Vypočítejte integrály:

a) $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$, b) $\int_0^{\infty} x.e^{-x}\,dx$, c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$, d) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$, e) $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x\cdot \ln^2 x}\,dx$, f) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$, h) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2).(3-x)}}$, i) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Výsledky úloh 8.3.

a) 1, b) 1, c) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, d) $\frac{\pi}{2}-1$, e) div., f) div., g) div., h) π, i) $\frac{8}{3}\pi$.

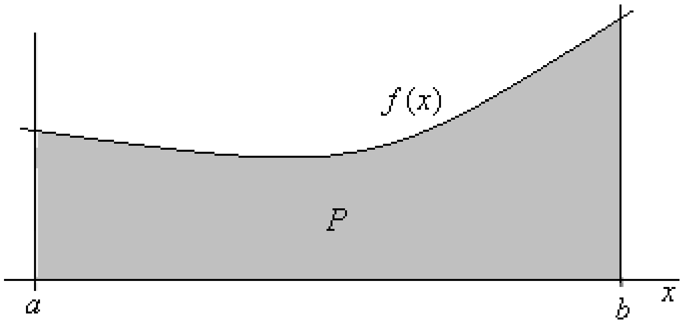
8.4 Geometrické aplikace určitého integrálu

V motivační úloze na začátku této kapitoly a při definování Riemannova určitého integrálu jsme ukázali, že pomocí určitého integrálu je možné vyjádřit obsah rovinných oblastí. Této a některým dalším geometrickým aplikacím se budeme nyní věnovat podrobněji.

Obsah rovinné oblasti

Při výpočtu obsahu omezených rovinných oblastí mohou nastat následující základní případy :

- Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a pro $x\in\langle a,b\rangle$ platí $f(x)\geq 0$. Obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$ se vypočítá pomocí vzorce $P=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.



Příklad 8.9.

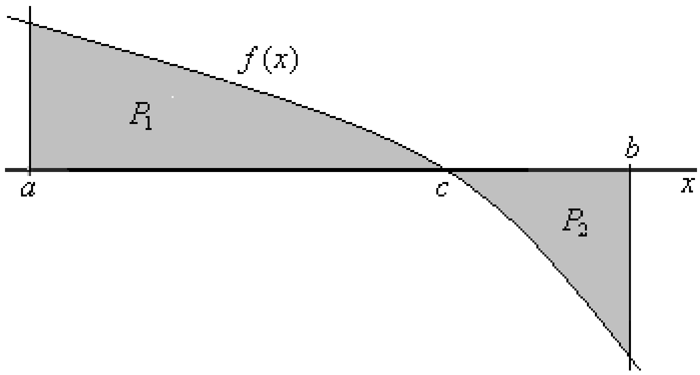
Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.

Řešení: Rovinný útvar je ohraničený grafem kvadratické funkce, tedy parabolou, osou x a dvěma přímkami rovnoběžnými s osou y. Jeho obsah se vypočítá jako určitý integrál funkce $y=x^2+1$ pomocí vzorce

$$P=\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=6\ \left[\mathrm{j}^2\right].$$

- Nechť funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ je zde záporná, nebo mění v tomto intervalu znaménko. Obsah příslušného obrazce se vypočítá pomocí vzorce $P=\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Při výpočtu určíme průsečíky funkce $f(x)$ s osou x a stanovíme intervaly, ve kterých platí $f(x)>0$, a ve kterých je $f(x)<0$. Na každém z těchto intervalů pak počítáme určitý integrál, přičemž v intervalech, ve kterých je funkce záporná, změníme znaménko funkce $f(x)$.



Např. pro oblast na obrázku je $P=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx.$

Příklad 8.10.

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ \ x=2\pi$.

Řešení: Goniometrická funkce $y=\sin x$ je na intervalu $\langle 0,\ 2\pi\rangle$ spojitá a v bodě $x=\pi$ přechází z kladných do záporných hodnot.

Obsah daného obrazce vypočítáme podle vzorce:

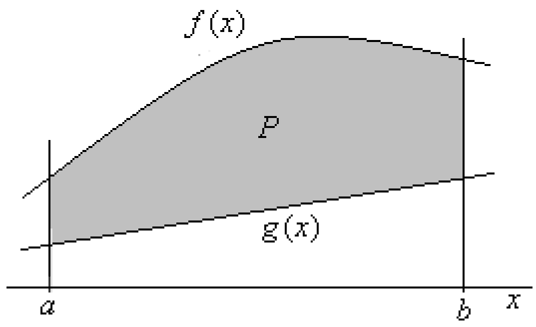
$$P=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}-[-\cos x]_{\pi}^{2\pi}=(-\cos\pi+\cos 0)-$$
$$-(-\cos 2\pi+\cos\pi)=1+1+1+1=4\ [\mathrm{j}^2]$$

Poznámka: 1) Protože část útvaru nad osou x je stejně velká jako část pod osou x, bylo by možné obsah celého útvaru počítat jako $P=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx$.

2) Rozlišujme výpočet obsahu obrazce a výpočet určitého integrálu. Při výpočtu určitého integrálu $\int_0^{2\pi}\sin x\,dx$ bychom postupovali takto:

$$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{2\pi}=(-\cos 2\pi)-(-\cos 0)=-1+1=0\,.$$

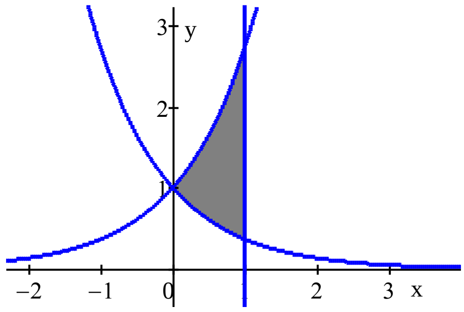
- Obsah rovinné oblasti ohraničené funkcemi $f(x)$ a $g(x)$, spojitými na intervalu $\langle a,b\rangle$, pro které na tomto intervalu platí $g(x)\le f(x)$, a dále přímkami $x=a,\ x=b$, se vypočítá pomocí vzorce $P=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$.



Příklad 8.11.

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1$.

Řešení: Nakreslíme zadané funkce a získáme oblast, jejíž obsah máme určit.



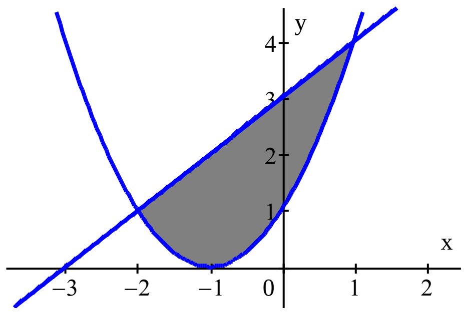
Dolní mez příslušného integrálu bude tvořit první souřadnice průsečíku grafů funkcí $y = e^x$ a $y = e^{-x}$. Grafy funkcí $y = e^x$ a $y = e^{-x}$ se protínají v bodě $[0, 1]$, dolní mezí integrálu bude tedy hodnota $x = 0$. Horní mez je hodnota $x = 1$. Protože graf funkce $y = e^x$ leží „nad“ grafem funkce $y = e^{-x}$, obsah plochy vypočítáme podle vzorce

$$P = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\, dx = \left[e^x\right]_0^1 - \left[-e^{-x}\right]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2\left[j^2\right].$$

Příklad 8.12.

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$.

Řešení: Nakreslíme zadané funkce a získáme oblast jejíž obsah máme určit.



Meze příslušného určitého integrálu jsou x-ové souřadnice průsečíků obou křivek. Získáme je řešením soustavy rovnic $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$.

$$\text{Tedy}\quad \begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \\ x_1 = -2,\ x_2 &= 1 \end{aligned}\ .$$

Obsah zadané oblasti je pak

$$P = \int_{-2}^{1} (x+3) - (x^2 + 2x + 1)\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 -$$

$$-\left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 4\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 4{,}5\left[j^2\right].$$

Objem rotačního tělesa

Objem tělesa, které vznikne rotací oblasti, ohraničené grafem nezáporné funkce $f(x)$, spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$, osou *x* a přímkami $x=a$, $x=b$ kolem osy *x*, se vypočítá pomocí vzorce

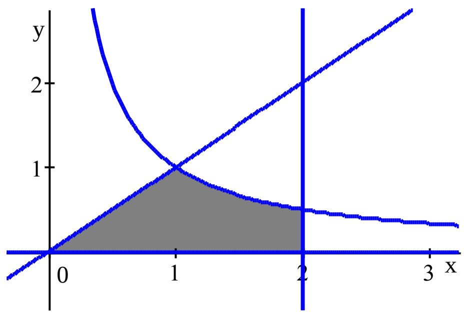
$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx\,.$$

Je-li funkce $f(x)$ nezáporná a má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci, vypočítá se obsah pláště popsaného rotačního tělesa pomocí vzorce $S=2\pi\int_a^b |f(x)|\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Příklad 8.13.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x=0$, $x=2$ kolem osy x.

Řešení: Těleso vznikne rotací oblasti, znázorněné na obrázku.



Oblast je shora ohraničená dvěma křivkami, jejichž průsečíkem je bod $[1,1]$. V intervalu $\langle 0,1\rangle$ je ohraničena grafem funkce $y=x$ a v intervalu $\langle 1,2\rangle$ grafem funkce $y=\frac{1}{x}$.

Objem daného tělesa vyjádříme jako součet dvou určitých integrálů:

$$V=\pi\int_0^1 x^2\,dx+\pi\int_1^2\left[\frac{1}{x}\right]^2 dx=\pi\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2\right)=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{6}\pi\ [j^3].$$

Délka rovinné křivky

Délka křivky o rovnici $y=f(x)$ pro $x\in\langle a,b\rangle$, kde funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci, se vypočítá pomocí vzorce $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Příklad 8.14.

Vypočítejte délku oblouku křivky $y=\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ mezi průsečíky s osou *x*.

Řešení: Určíme průsečíky s osou x: $0=\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}\ \Leftrightarrow\ x=3\vee x=0$.

Vypočítáme nejprve první derivaci funkce $y=\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$:

$$y'=\frac{1}{3}\left[x^{\frac{1}{2}}+(x-3)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{3}\left[\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{3}\,\frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}.$$

Délku oblouku zadané křivky vypočítáme pomocí určitého integrálu:

$$L=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4x}}\,dx=\int_0^3\sqrt{\frac{4x+x^2-2x+1}{4x}}dx=\int_0^3\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}dx=$$

$$=\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=\left|\begin{array}{ll}\text{subst.}: x=t^2 & \text{meze}: x=0\Rightarrow t=0\\ dx=2tdt & x=3\Rightarrow t=\sqrt{3}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2+1}{t}\,2tdt=\int_0^{\sqrt{3}}\left(t^2+1\right)dt= \quad =$$

$$\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,[j].$$

Úlohy 8.4.

1. Vypočítejte obsah plochy ohraničené křivkami:

a) $y=-x^2+2x-3,\ y=0,\ x=0,\ x=3$, b) $y=x^2,\ y=\frac{x^3}{3}$,

c) $y=x,\ y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=2$, d) $y=-x,\ y=2x-x^2$,

e) $y=\sin x+2,\ x\in\langle 0,\pi\rangle,\ y=0$, f) $y=\sqrt{2x},\ x-y-4=0,\ y=0$,

g) $y=x^3+2x^2-3x$, h) $y=\frac{2}{x-2},\ y=5-x$, i) $y=\frac{1}{1+x^2},\ y=\frac{x^2}{2}$,

j) $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$.

2. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami kolem osy x:

a) $y=x^2+3,\ x=-1,\ x=1,\ y=0$, b) $y=\sin x,\ x\in\langle 0,\pi\rangle$, c) $y=\sqrt{1+\operatorname{arctg} x},\ x\in\langle 0,1\rangle$,

d) $y=x^2,\ y=x$, e) $xy=4,\ 4x+3y=16$, f) $y=\sqrt{x},\ x=4-y^2$.

3. Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru r.

4. Vypočítejte délku rovinné křivky o rovnici : a) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x,\ x\in\langle 1,e\rangle$,

b) $y=1-\ln(\cos x),\ x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right\rangle$, c) $y=\sqrt{2-x^2},\ x\in\langle 0,1\rangle$.

Výsledky úloh 8.4.

1. a) 9, b) $\frac{9}{4}$, c) $\frac{1}{2}+\ln 2$, d) $\frac{9}{2}$, e) $2+2\pi$, f) $\frac{40}{3}$, g) $\frac{71}{6}$, h) $\frac{3}{2}-\ln 4$, i) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$, j) $\frac{16}{3}$.

2. a) $\frac{112}{5}\pi$, b) $\frac{\pi^2}{2}$, c) $\pi\left(1+\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)$, d) $\frac{2\pi}{15}$, e) $\frac{128\pi}{27}$, f) 4π.

3. $V=2\pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi r^3$. 4. a) $\frac{e^2+1}{4}$, b) $\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$, c) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

Shrnutí kapitoly

Pojem určitého integrálu.
Riemannův určitý integrál ohraničené funkce na určitém intervalu je definován jako limita integrálních součtů pro $n \to \infty$. Integrální součet pro dané n je přitom součet obsahů obdélníků, které mají základnu rovnou délce dílčího intervalu, na které byl daný interval rozdělený, a výšku rovnou funkční hodnotě ve zvoleném bodě tohoto dílčího intervalu.
Vlastnosti určitého integrálu.
Funkce je na daném intervalu integrovatelná, pokud je zde spojitá nebo monotónní.
Pro počítání určitého integrálu platí vztahy:

$$\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \text{ kde } c \in (a,b).$$

Vztah mezi neurčitým a určitým integrálem.
Výpočet určitého integrálu provádíme pomocí Leibniz-Newtonova vztahu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Metody pro výpočet určitého integrálu.
Pro výpočet určitého integrálu používáme všechny postupy a metody, které jsme používali při výpočtu neurčitého integrálu. Na každou část primitivní funkce, ke které při výpočtu dojdeme, však musíme aplikovat Leibniz-Newtonův vztah a při použití substituční metody nesmíme zapomenout na transformaci mezí.
!*!**Nevlastní integrál a jeho výpočet.**
Nevlastní integrál je rozšíření Riemannova určitého integrálu i na neohraničené funkce a na nekonečné integrační intervaly. Jejich výpočet provádíme pomocí limity, přičemž mez, ve které jsou funkce nebo interval neohraničené, nahradíme pomocnou proměnnou, pro kterou pak limitu počítáme.
Je-li tato limita konečná, říkáme, že nevlastní integrál konverguje, v opačném případě říkáme, že nevlastní integrál diverguje.
Geometrické aplikace určitého integrálu.
$\int_a^b f(x)\,dx$ vyjadřuje obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Určitý integrál však má celou řadu dalších aplikací v matematice (např. objem a plášť rotačního tělesa, délka křivky), fyzice, ekonomice a dalších oborech.

Klíčové pojmy

- dělení intervalu, norma dělení,
- integrální součet,
- Riemannův určitý integrál,
- Leibniz-Newtonova věta,
- metoda substituce a per partes pro určitý integrál,
- nevlastní integrál,
- geometrické aplikace určitého integrálu (obsah, objem, délka křivky).

Samostatný test

A. Teoretická část

1. Platí-li, že f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, je pro existenci Riemannova integrálu funkce f na $\langle a, b\rangle$ splněna podmínka:

a) jen nutná, b) jen postačující, c) nutná i postačující.

2. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

a) Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná.

b) Výsledkem určitého integrálu je vždy nezáporné číslo.

c) Nevlastní integrál je vždy divergentní.

d) $\int_a^b f(x)\,dx$ vyjadřuje obsah obrazce, ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a,\ x = b$.

3. Aniž byste příklad počítali, vyberte a zdůvodněte správnou odpověď.

Hodnota $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$ je: a) $\frac{\pi}{2}$, b) 0, c) 1.

4. Zdůvodněte, proč při výpočtu následujících integrálů nelze použít Leibniz-Newtonovu větu

a) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx$, b) $\int_{3}^{7} \ln(x-3)\,dx$, c) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

B. Praktická část

1. Pomocí Leibniz-Newtonovy věty vypočítejte určité integrály:

a) $\int_0^2 (3x^3 - 2x + 5)\,dx$, b) $\int_1^4 \left(-x + \frac{4}{x}\right) dx$, c) $\int_{-2}^{1} e^{3x}\,dx$.

2. Pomocí vhodné substituce vypočítejte určité integrály:

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx$, b) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$, c) $\int_1^e \frac{6\ln^2 x}{x}\,dx$.

3. Metodou per partes vypočítejte určité integrály:

a) $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$, c) $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$.

4. Vypočítejte nevlastní integrály:

a) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^3}\, dx$, b) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}\, dx$, c) $\int_{-\infty}^{\infty} x.e^{-x^2}\, dx$.

5. Vypočítejte obsah plochy ohraničené křivkami:

a) $y = \operatorname{tg} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$, b) $y = \frac{1}{3}x^2,\ 2x - 3y + 3 = 0$.

6. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami kolem osy x: a) $y = \cos x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ y = 0$, b) $y = \frac{x^2}{2},\ x = 1, y = 0$.

7. Vypočítejte délku rovinné křivky o rovnici:

a) $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 1 \rangle$, b) $y = \ln\left(1 - x^2\right),\ \ 0{,}1 \le x \le 0{,}4$.